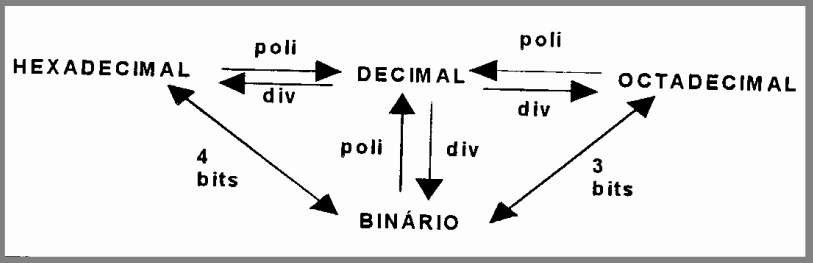
**Cálculo Numérico**

**Sistema de Numeração/Teoria dos Erros/Zeros de Funções/Sistemas Lineares**

1. **Sistema de Numeração**
   1. **Conversão de Base Numérica**

É o nome dado à passagem da representação de um número de uma base numérica para outra, alterando a simbologia para se adequar à nova base. A base que normalmente usamos é a decimal ou base dez, pois contém dez algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).



* 1. **Aritméticas Binárias**

Como o computador manipula os dados (números) através de uma representação binária, iremos estudar agora a aritmética do sistema binário, a mesma usada pela ULA (Unidade Lógica e Aritmética) dos processadores.

* + 1. **Soma**

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = 0 (e “vai um” para o dígito de ordem superior)

* + 1. **Subtração**

0 - 0 = 0

0 - 1 = 1 (“vem um do próximo”)

1 - 0 = 1

1 - 1 = 0

* + 1. **Multiplicação**

0 x 0 = 0

0 x 1 = 0

1 x 0 = 0

1 x 1 = 1

* + 1. **Divisão**

A divisão é análoga à uma divisão de decimais, trabalhando com multiplicação e subtração.

* 1. **Complemento de 1**

Outra maneira de representar números binários negativos, consiste em inverter todos os bits, ou seja onde tem 0 ele é substituído por 1 e onde existe 1 é substituído por 0.

Ex: (0101)2 = (1010)2; (0111)2 = (1000)2;

* 1. **Complemento de 2**

Os números negativos nessa abordagem são representados primeiramente aplicando-lhes a regra do complemento de 1 e em seguida soma 1 ao resultado. O principal objetivo do complemento de 2 é trazer uma representação única ao número zero e possibilitar a soma de números positivos e negativos, sem se preocupar com os sinais, pois nessa abordagem a soma de números positivos e negativos pode ser feita normalmente como a soma de dois números positivos. A CPU pode realizar uma subtração indiretamente pela adição do complemento de dois do Subtraendo com Minuendo.

Ex: (0101)2 = (1011)2; (0111)2 = (1001)2

1. **Teoria dos Erros**

Conjunto de operações que têm por objetivo determinar o valor de uma grandeza.

* 1. **Aritmética de Ponto Flutuante**
     1. **Representação Numérica nas Máquinas Computacionais**

dt = Número de dígitos

e = Expoente

Número = (0,d1d2...dt) x Be

B = Base

Mantissa

Aonde:

d1 ≠ 0;

exp ϵ [m, M] ; m = limitante inferior do expoente; M = limitante superior do expoente

Nota: Máquina Computacional tem memória finita

* 1. **Arredondamento e Truncamento de Ponto Flutuante**

***Tipos de Arredondamentos:*** Matemático; Estatístico e ABNT.

**Critério ABNT (Este será o critério adotado no curso de Cálculo Numérico)**

Verifica o dígito posterior ao dígito a ser arredondado, se for > 5, então (soma +1);

Se for < 5, então (mantém o dígito)

Se for =5, então ( Se o dígito anterior for ímpar, soma + 1, ao dígito anterior. Se o dígito anterior for par, mantém o dígito anterior).

* 1. **Overflow e Underflow – SPF (Sistema de Ponto Flutiante)**

t = Número de dígitos

SPF(B, t, m, M) exp ϵ [m;M], máquina opera por arredondamento ABNT

B = Base

* 1. **Palavra de 16 Bits**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|  |  | Expoente (Posição 2 a 5) |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Mantissa (Posição 6 a 15)

Sinal do expoente (Posição 1)

Sinal do número (Posição 0)

* 1. **Erro Absoluto e Relativo**

“Erro” é a diferença entre um valor medido e um valor verdadeiro de uma grandeza. “Incerteza” é a quantificação da dúvida sobre o resultado da medição.

**Erro Absoluto (EA)**

X = Valor exato ou valor original; Xa = Valor aproximado.

**Erro Relativo (ER)**

ER =

**Erro Relativo (ER) em percentual**

ER = \*100

* 1. **Máximo Erro Relativo de Arredondamento (Propagação de Erro)**

Análise de Erros nas Operações Aritméticas de Ponto Flutuante.

Onde: RA = , porque o erro sempre aumenta.

Nota: Os números são considerados exatamente representados, quando ERx=0; ERy=0;

Os cálculos são efetuados em pares.

Adição

Subtração

Divisão

Multiplicação

1. **Zeros de Funções**

Métodos numéricos aplicados na medida em que a complexidade aumenta nas soluções analíticas para obter as raízes de funções polinomiais.

Condições: f(x)=0 e se f(a) \* f(b) < 0, então vai existir um zero da função no intervalo [a ; b].

* 1. **Teorema de Bolzano**

Se f(a) \* f(b) < 0, então vai existir um zero da função no intervalo **[a ; b]**. Zero de funções não lineares e reais.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | -∞ | -99 | -13 | -7 | -5 | -1 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| f(x) | - | - | - | - | + | + | + | - | - | + | + | + |

**f(a) \* f(b) < 0 => xo ϵ [a ; b]**

**-+**

**+-**

* 1. **Método da Bisseção**

Este método numérico da bissecção pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares quando a raiz **x = xo** está no **intervalo de [a ; b].**

A raiz da função não linear pode ser estimada pela média aritmética do intervalo **xk =** , em que a tolerância (**restrição)** de **|f(xk)|< ε, ou |b – a| < ε**.

Onde **Xk**, é a estimativa do zero da função não linear.

* 1. **Método da Falsa Posição / Posição Falsa ou Regula Falsi**

Este método numérico da falsa posição pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares.

**+**

**-**

Então, dado o **intervalo de [a ; b],** a raiz aproximada da função não linear pode ser estimada por , em que a tolerância (**restrição)** de **|f(xk)|< ε, ou |b – a| < ε**.

Onde **Xk**, é a estimativa do zero da função não linear. Lembrando a regra: **f(a) \* f(b) < 0**.

* 1. **Método do Ponto Fixo**

A partir da expressão f(x) = 0, podemos determinar a expressão **x = g(x)**, que é a função de iteração que será utilizada para calcular o valor de x. Para tanto, temos: **Xk+1= g(Xk).** Sendo Xk+1, a estimativa da raiz da função não linear atual e g(Xk), a estimativa da raiz da função não linear anterior. Na qual, a estimativa da raiz atual depende da estimativa da raiz anterior.

* 1. **Método Newtin Rapshon**

Dada à expressão **f(x) = 0** e a estimativa inicial X0, podemos calcular a raiz real estimada da função não linear, de acordo com a **estimativa atual (Xk+1)** e a **estimativa anterior (Xk)**, a partir da expressão

**.**

Este é o método no qual a estimativa atual depende da estimativa anterior, além disso, o método depende do **valor da função f no ponto Xk da estimativa anterior** e também do **valor da derivada da função f** **no ponto Xk da estimativa anterior**.

* 1. **Método Secante**

Dada duas raízes reais com estimativas iniciais: X0 e X1 e à expressão f(x) = 0, podemos calcular a raiz real estimada da função não linear, de acordo com a **estimativa atual (Xk+1)** e as **duas estimativas anteriores (Xk e Xk-1)**, a partir da expressão , sendo que, a estimativa atual depende das duas estimativas anteriores.

1. **Sistemas Lineares – Métodos Diretos**

É um conjunto de equações lineares, com m equações e n incógnitas. Para reduzir este sistema, serão utilizados métodos numéricos diretos e iterativos, transformando em sistemas triangulares, através de escalonamento.

* 1. **Método Gauss**

É o sistema diagonal em que os elementos aij da matriz coeficiente [A] são iguais à zero, para i < j.

O método de Gauss consiste em, por meio de um número de (n-1) passos, transformar o sistema linear A.x=B em um sistema triangular equivalente, Ux=C. Este método é mais usado em sistemas lineares de pequeno e médio portes (n=30 e n=50 respectivamente).

As operações elementares para transformar o sistema inicial em outro equivalente são as seguintes:

· Multiplicar uma linha por um número real diferente de zero;

· Somar ou subtrair a uma linha outra linha;

· Somar a uma linha outra linha multiplicada por um número diferente de zero.

· Trocar a ordem de duas linhas;

· Trocar a ordem das colunas que correspondem as incógnitas do sistema, levando em consideração as trocas realizadas na hora de escolher o novo sistema equivalente;

· Eliminar linhas proporcionais ou que sejam combinações lineares de outras linhas;

· Eliminar linhas nulas (0 0 0 ... 0);

Para reduzir os sistemas lineares de equações será necessário utilizar escalonamento.

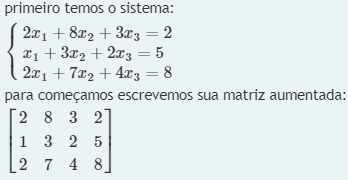
Passos:

1. Identificar os **Pivôs** (elementos da diagonal principal); Ex.: A11, A22, A33, etc.
2. **Zerar os elementos das linhas abaixo do Pivô**, utilizando os multiplicadores, por exemplo, m2,1 = **elemento da linha a ser ZERADO/ pelo Pivô**, depois, multiplicando os elementos da linha onde está o pivô e somando com os elementos da linha onde está o elemento a ser ZERADO;

Ex.: Zerar o elemento A2,1 que está abaixo do pivô A1,1 da linha L1.

L2 = L2 – m2,1 \* L1, onde: m2,1 = A2,1 / A1,1 **(multiplicador do Pivô)**

1. Identificar o multiplicador da linha onde está o Pivô, definido pela razão entre o elemento da linha a ser zerado e o pivô;
2. Multiplicar a linha aonde se encontra o pivô pelos elementos da linha a ser zerada;



**Solução: X1=3; X2 = -2; X3 =4.**

* 1. **Método Pivoteamento Parcial**

Semelhante ao método de Gauss. Minimiza a amplificação de erros de arredondamento durante as eliminações. Consiste em escolher o elemento de maior módulo em cada coluna para ser o Pivô.

Portanto, faz-se necessário identificar o **maior elemento** **em módulo** da coluna em que se encontra o primeiro Pivô. Após identificar trocar a linha que se encontra o Pivô pela linha onde está o maior elemento em módulo. Assim sucessivamente, para cada Pivô da matriz a ser escalonada.

Depois aplicar o procedimento de Gauss para zerar os elementos da diagonal principal abaixo do Pivô, através da técnica de escalonamento.

* 1. **Método Jordan**

É o sistema diagonal em que os elementos aij da matriz coeficiente [A] são iguais à zero, para i<>j.

Será aplicado o procedimento de Gauss para zerar os elementos da diagonal principal abaixo do Pivô, através da técnica de escalonamento, e também zerar os elementos da diagonal principal acima do Pivô.

* 1. **Método Fatoração LU ou Decomposição LU**

O objetivo é fatorar a matriz dos coeficientes A em um produto de duas matrizes L e U.

Ax = b; Ax = LU

LUx = b = > L\*(Ux) = b; Fazendo Ux = y, temos: Ly = b

A **matriz U** é a matriz escalonada pelo método de Gauss, somente dos coeficientes da matriz A.

A **matriz L** é a matriz definida com os elementos da diagonal principal iguais a 1, acima destes elementos iguais a ZERO e abaixo dos elementos da diagonal principal os elementos multiplicadores utilizados pelo método de sistema de Gauss, utilizados para escalonar a matriz A.

Para resolver a fatoração LUx = b, será necessário resolver dois sistemas:

1. Resolver o sistema Ly = b
2. Depois resolver o sistema Ux = y.

Nota: b (**vetor constante b** da matriz A); y (**vetor constante y**, resultado do sistema Ly = b).